Геометрия

Младшая лига

1. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CL. Известно, что точка L равноудалена от вершины прямого угла B и середины гипотенузы AC. Найдите угол BAC.

(Ф. Нилов)

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $\angle BCA + \angle CAD = 180°$. Докажите, что $AB + CD \geqslant AD + BC$.

(А. Смирнов по мотивам сербской окружной олимпиады 2014)

3. В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна CD, и $AB > CD$, а прямая BD делит угол $\angle ADC$ пополам. Прямая, проходящая через C параллельно AD, пересекает отрезки BD и AB в точках E и F соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника BEF. Предположим, что $\angle ACO = 60°$. Докажите, что $CF = AF + FO$.

(Middle European 2012)

4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны такие точки M и N, что $AM < AN$. Прямая, проходящая через M и перпендикулярная CN, пересекает прямую AC в точке P. Прямая, проходящая через N и перпендикулярная CM, пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что описанные окружности треугольников APM и BNQ и прямая PQ имеют общую точку.

(Iran 2014)

Старшая лига

1. Замкнутая шестизвенная ломаная в пространстве такова, что каждое её ребро параллельно одной из координатных осей прямоугольной системы координат. Докажите, что её вершины лежат на одной сфере или в одной плоскости.

(Iran 2014)

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы $\angle B$ и $\angle D$ равны. Оказалось, что точки пересечения биссектрис соседних углов $ABCD$ образуют выпуклый четырехугольник $EFGH$ (E лежит на биссектрисах $\angle A$ и $\angle B$, F — $\angle B$ и $\angle C$, и т. д.). Пусть K — точка пересечения диагоналей $EFGH$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD — в точке Q. Докажите, что P лежит на описанной окружности треугольника BKQ.

(Middle European 2012)

3. Точка D — середина биссектрисы BL треугольника ABC. На отрезках AD, DC выбраны точки E, F соответственно так, что углы $\angle BEC$ и $\angle BFA$ — прямые. Докажите, что точки A, E, F, C лежат на одной окружности.

(Украина 2014, задача 10.8)

4. Множество точек в пространстве назовем интересным, если для любой плоскости вне её находится хотя бы 100 точек этого множества. При каком наименьшем d можно утверждать наверняка, что любое интересное множество точек в пространстве содержит интересное подмножество не более чем с d точками?

(IMC 2014)